

# Ein Zugang zu Bayes<sup>1</sup>

TIM ERICKSON, SAN FRANCISCO, USA

<sup>1</sup> Original: Beginning Bayes. In: *Teaching Statistics*, 39(2017)1, 30–35.  
Übersetzung und Bearbeitung: HANS-DIETER SILL

**Zusammenfassung:** *Das Verständnis der Bayesschen Vorgehensweise erfordert ein Vertrautsein mit bedingten Wahrscheinlichkeiten und mit Wahrscheinlichkeiten, die sich bei weiteren Informationen verändern. Es wird ein einfacher Kontext mit bedingten Wahrscheinlichkeiten vorgeschlagen, der den Schülern helfen soll, ihr Verständnis für die Bayessche Denkweise zu entwickeln.*

## Einleitung

Viele Leute waren über das Ergebnis der jüngsten Präsidentschaftswahlen in den USA überrascht, da es nach Umfragen schien, dass Trump verlieren würde. War das ein grober Statistikfehler?

Vielleicht nicht, z. B. gab am Vormittag der Wahl Nate Silver auf seiner Website (<http://projects.fivethirtyeight.com/2016-election-forecast/>) an, dass Trump eine 28 %ige Gewinnchance hat. Sollte man deshalb über das Wahlergebnis überrascht sein? Nein, Ereignisse mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\frac{1}{4}$  können jederzeit eintreten.

Man kann zwei Zugänge zur Vorhersage von Trumps Resultaten betrachten. Zum einen können Konfidenzintervalle für die Abschätzung des Anteils der Wähler, die ihn unterstützen konstruiert und die Fehlergrenzen betrachtet werden. Mit diesem Zugang kann eine Antwort auf die Frage gefunden werden, welcher Anteil der Wähler aktuell für Trump stimmen wird.

Im Kontrast dazu haben Nate Silver und seine Kollegen versucht, eine Antwort auf eine andere Frage zu finden: Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird Trump gewinnen?

Beide Zugänge sind möglich. Der zweite Zugang ist für uns und die Schüler eher fremdartig. Wie ist es möglich, bei einem solchen Ereignis wie eine Wahl eine Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis anzugeben? Wir wissen, wie man die Wahrscheinlichkeit bestimmt für ein Ereignis, das auf Hypothesen basiert. Wie kann man umgekehrt die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese bestimmen auf der Basis von Ergebnissen? Die Antwort heißt, man muss baysianische Überlegungen nutzen.

Der Bayessche Zugang ist von wachsender Bedeutung für zahlreiche Disziplinen, wie wissenschaftli-

che Studien und Medienanalysen, aber nur wenige Einführungskurse erläutern in geeigneter Weise Bayessche Techniken.

Stellen wir uns vor, dass wir eine Einführung in diese Art von Überlegungen vornehmen wollen. Was brauchen Schüler, um die Überlegungen zu verstehen? Auf jeden Fall brauchen Sie ein Verständnis für die bedingte Wahrscheinlichkeit. Es wurden einige Anstrengungen unternommen, bedingte Wahrscheinlichkeit verständlicher zu machen (Gigerenzer & Hoffrage 1995, Martignon Krauss 2009). Wir wollen ihre Arbeit nutzen, Schülerinnen und Schüler bedingte Wahrscheinlichkeit verständlich zu machen und zugleich eine gute Grundlage für eine bayessche Perspektive zu schaffen.

Wir beschreiben eine Unterrichtssequenz zur bedingten Wahrscheinlichkeit, die versucht, genau das zu tun. Wenn es dabei den Schüler gelingt, die Bayes-Analyse zu verstehen, werden sie davon profitieren. Wenn es später darum geht, mehr zu lernen, könnte es eine Grundlage sein, zu der sie zurückkehren können, um Formulierungen von Wahrscheinlichkeiten zu verstehen, die im Lichte von Daten aktualisiert werden und in denen eine subjektive Komponente eine Rolle spielt (de Finetti 1964).

## Die Zwei-Münzen-Situation

Angenommen, ich habe zwei Münzen: eine reguläre, faire Münze und eine mit zwei Wappen. Eine wähle ich zufällig aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die faire Münze ausgewählt wurde? Die Antwort lautet  $\frac{1}{2}$  oder 50 %.

Ein anderer Zugang kann so formuliert werden: Es gibt zwei konkurrierende Hypothesen: Wir haben entweder eine faire Münze oder eine Münze mit zwei Wappen. Anfänglich sind diese Hypothesen gleichwahrscheinlich, weil wir die Münze zufällig ausgewählt haben. Abb. 1 zeigt ein einfaches Flächenschema, das die beiden Hypothesen darstellt. Ich werfe die Münze, die ich wählte, ohne zu zeigen, ob sie fair ist oder nicht. Es kommt Wappen. Wissen wir, welche Hypothese wahr ist? Natürlich nicht. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass meine Münze „fair“ ist? Die meisten Schüler sagen, dass es [offensichtlich!] noch  $\frac{1}{2}$  ist.

Nun nehme ich an, dass ich die gleiche Münze weitere neunmal werfe und Wappen bei jedem Wurf bekomme. Es ist möglich, dass die Münze fair ist, aber viele Schüler sagen, die Münze muss zwei Wappen haben.

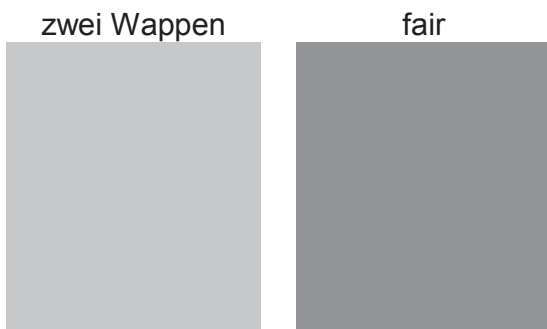


Abb. 1: Flächendiagramm für die beiden Hypothesen. Die Fläche ist proportional zur Wahrscheinlichkeit.

Wir können fragen: Ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Münze fair ist noch  $1/2$  oder hat sich die Wahrscheinlichkeit verändert? Hier werden dann einige Schüler unruhig: Kann sich eine Wahrscheinlichkeit ändern? Nach zehnmal Wappen nacheinander kann die Wahrscheinlichkeit eine faire Münze zu haben, doch nicht  $1/2$  sein, oder doch?

Wir erklären nun, dass es tatsächlich zwei verschiedene Sichten auf die Wahrscheinlichkeit gibt. Sie kann einmal erklärt werden als etwas, was sich ändert aufgrund von Daten oder Fakten. Und sie ist andererseits ein fester Zahlenwert.

Betrachten wir den ersten Wurf. Die Abb. 2 zeigt die möglichen Ergebnisse auf drei verschiedene Weisen. Links sehen wir eine Version, bei der die Ergebnisse Zahl und Wappen nur bei der fairen Münze un-

terschieden werden. In der Mitte unterscheiden wir zwei „Wappen“ der Münze mit zwei Wappen. Rechts ist ein äquivalentes Diagramm, in dem die beiden Wappen durch zwei identische Flächen veranschaulicht werden.

Wir können nun die Wahrscheinlichkeit, dass wir eine faire Münze haben, durch Abzählen bestimmen. Die linke Seite der Abb. 3 zeigt die Situation nach dem ersten Wurf, bei dem sich Wappen als Fakt ergeben hat. Um die Wahrscheinlichkeit auf der Grundlage dieses Fakt es zu bestimmen, betrachten wir nur die Flächen zum „Wappen“ und ignorieren die Flächen mit „Zahl“, weil dies nicht eingetreten ist. Von den drei „Wappenkästchen“ ist nur die erste von der fairen Münze. Das bedeutet, dass sich die Wahrscheinlichkeit für „fair“ von  $1/2$  auf  $1/3$  verringert hat.

Die rechte Hälfte des Diagramms zeigt die Erweiterung des Prinzips für den zweiten Wurf. Wir unterteilen jedes Ergebnis des vorhergehenden Schrittes und gewinnen daraus die Wahrscheinlichkeit von  $1/5$  für „fair“. Wenn wir nur die W- oder WW-Flächen betrachten, können wir damit die Wahrscheinlichkeit beschreiben, dass die gewählte Münze fair ist, indem wir unter Verwendung der Daten den Ergebnisraum bzw. den Bezug für die Wahrscheinlichkeit erneuern.

Die neuen Wahrscheinlichkeiten ( $1/3$  oder  $1/5$ ) sind durch die Daten bzw. Fakten bedingt. Um dies auszudrücken sagt man oft „bei den gegebenen Daten“ und nutzt einen senkrechten Strich in der Bezeichnung.



Abb. 2: Äquivalente Diagramme für die Situation nach dem ersten Wurf

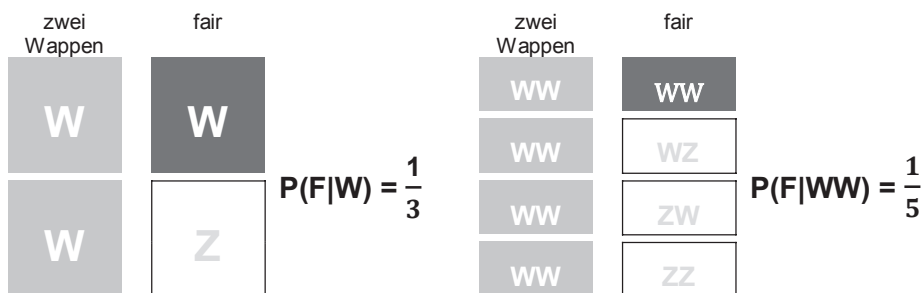


Abb. 3: Die Wahrscheinlichkeit für eine faire Münze (F) nach den Daten „ein Wappen“ und „zwei Wappen“

## Diskussion und Erweiterung

Wir haben die Flächendiagramme schrittweise erzeugt, indem wir sie in zwei Spalten entsprechend der Hypothesen der gewählten Münze unterteilten und dann die Spalten weiterhin so aufgeteilt haben, dass ein Satz gleichwahrscheinlicher Ergebnisse entstand. Letztlich haben wir die Teile des Diagramms betrachtet, die zu unseren Fakten passen (ein Wappen oder zwei Wappen) und haben die betreffenden Kästchen abgezählt, um damit die Wahrscheinlichkeit zu berechnen.

Diese Diagramme, die auch als Mosaikdarstellungen bezeichnet werden (Friendly 2001), sind üblich bei der Behandlung der bedingten Wahrscheinlichkeit. Wir haben sehr sorgfältig die Situation definiert, so dass wir die Spalten in gleich große Kästchen teilen konnten und deutlich zeigen konnten, wie die Wahrscheinlichkeit sich ändert, wenn zusätzliche Daten erhoben werden.

Wir können nun dieselbe Technik in komplexeren Situationen nutzen. So können wir zum Beispiel davon ausgehen, dass die Wahrscheinlichkeit für eine faire Münze nach dem ersten Wurf  $1/3$  beträgt. Wir müssen allerdings beachten, dass sich diese Wahrscheinlichkeit von der Wahrscheinlichkeit für Wappen unterscheidet, die je nach Münze  $0,5$  oder  $1$  beträgt. Die Wahrscheinlichkeit für Wappen ist ein Parameter, der die Hypothesen charakterisiert. Wir werden ihn im Folgenden mit  $\pi$  bezeichnen.

Um die Konsequenzen für ein weiteres Ergebnis Wappen zu analysieren, können wir anstelle der Analyse von zweimal Wappen, wie es auf der rechten Seite der Abb. 3 geschah, ein Diagramm wie in Abb. 4 nutzen. Daraus ergibt sich entsprechend der allgemeinen Technik erneut die Wahrscheinlichkeit von  $1/5$  für eine faire Münze. Es ist ersichtlich, dass mit jedem weiteren Wappen die Wahrscheinlichkeit für eine faire Münze weiter abnimmt.

Das Flächendiagramm in Abb. 4 bestätigt die Wahrscheinlichkeit  $1/5$  und führt uns zur Einführung weiterer Sprechweisen. Vor dem ersten Wurf haben wir das Diagramm in zwei Hälften geteilt. Die Wahrscheinlichkeit  $1/2$  nennen wir eine Vorher-Wahrscheinlichkeit (Priori-Wahrscheinlichkeit), dies bezeichnet die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese bevor zusätzliche Informationen gewonnen wurden. Nach dem ersten Wurf glauben wir, dass die Wahrscheinlichkeit einer fairen Münze  $1/3$  beträgt, so dass wir nun eine neue Vorher-Wahrscheinlichkeit haben, die in dem Diagramm in der Abb. 4 verwendet wurde. „Vorher“ bedeutet in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit vor dem zweiten Wurf.

Das Diagramm zeigt, dass nach einem weiteren Wappen die neue, aktualisierte Wahrscheinlichkeit für eine faire Münze  $1/5$  beträgt. Diese Wahrscheinlichkeit wird als Nachher-Wahrscheinlichkeit (Posteriori-Wahrscheinlichkeit) bezeichnet. Sie wird die Vorher-Wahrscheinlichkeit, wenn wir uns entscheiden ein drittes Mal zu würfeln.

Es sei bemerkt dass das Gesetz der großen Zahl weiter gilt. Wenn wir dieses Experiment sehr oft durchführen und uns alle Fälle notieren, in denen wir zweimal Wappen erhalten, hätten wir in ungefähr  $1/5$  der Fälle eine wahre Münze in diesen Versuchen verwendet.

Was ist mit der Bayes-Formel?

### Was ist mit der Bayes-Formel?

Durch die inhaltlichen Überlegungen war bisher eine Anwendung der Bayes-Formel nicht erforderlich, aber es könnte Schüler geben, die später diese Formel benötigen. Es gibt viele Wege zur Entwicklung der Formel, die zwei-Münzen-Situation ist eine neue Möglichkeit. Die Schüler können die Formel als eine Verallgemeinerung des Weges über das Zählen der Kästchen erleben. Unter Verwendung der rechten Seite der Abb. 4 findet man die Wahrscheinlichkeit  $1/5$  durch Division der Anzahl der Wappen-Kästchen in der Spalte für die faire Münze durch die Gesamtzahl der Wappen-Kästchen.

$$P(\text{fair} | \text{Wappen}) = \frac{1}{1 + 4} = \frac{P(\text{Wappen und fair})}{P(\text{Wappen und fair}) + P(\text{Wappen und nicht fair})}$$

Der Nenner ist einfach  $P(\text{Wappen})$ , also  $5/6$ . Mit Blick auf das Diagramm kann der Zähler ausgedrückt

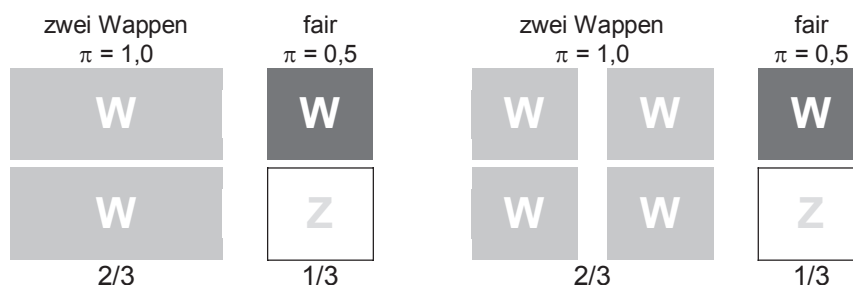


Abb. 4: Zwei alternative, äquivalente Diagramme für den zweiten Wurf nach einem Wappen im ersten Wurf

werden als die Vorher-Wahrscheinlichkeit eine faire Münze zu haben (d. h. die Breite der „fair“-Spalte, die 1/3 beträgt) multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit Wappen zu erhalten, wenn die Münze fair ist (die 1/2 beträgt). Dies führt zu

$$P(\text{fair} | \text{Wappen}) = \frac{P(\text{fair}) \cdot P(\text{Wappen} | \text{fair})}{P(\text{Wappen})} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{5}$$

Dies ist die Bayes-Formel in unserem Kontext. Die Schüler sehen, wie unterschiedliche Ansätze das gleiche Ergebnis ergeben und wie der Prozess des Zählens von Rechtecken und des Bestimmens von Verhältnissen zu einer Formel werden kann.

Die Schüler können die spezielle Formel weiter verallgemeinern. Die Möglichkeiten für die unbekannte Münze sind Hypothesen ( $H$ ) und die Ergebnisse der Würfe sind die beobachteten Daten ( $D$ ). Mit diesen Bezeichnungen lautet die Formel:

$$P(H|D) = \frac{P(H) \cdot P(D|H)}{P(D)}$$

### Ein Diagnosebeispiel

Ob ein Patient, ein Auto oder eine Software diagnostiziert, man ist immer mit Symptomen (den Daten) konfrontiert, es müssen aber die Ursachen (die Hypothesen) herausgefunden werden. Hier ist ein entsprechendes Beispiel.

Angenommen in einer Schule hat ein Zehntel der Personen eine Erkältung. Unter den Leuten, die Erkältungen haben, niesen vier von fünf, unter denen, die keine Erkältungen haben, nur einer von fünf. (Eine Erkältung haben oder nicht sind die Hypothesen. Das Niesen ist ein beobachtbarer Fakt).

Jemand niest ( $N$ ). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass er eine Erkältung ( $E$ ) hat? Die Abb. 5 ist ein Flächendiagramm für diese Situation. Wir richten unserer Aufmerksamkeit in diesem Diagramm auf die dunkleren Flächen, den „Nieser-Bereich“, und ignorieren den Rest. Welcher Anteil der „Nieser“ hat eine Erkältung? Man kann die Kästchen zählen (oder die Flächen berechnen) und erhält als Antwort 8/26 bzw. 4/13.

Mit Anwendung der Bayes-Formel ergibt sich:

$$P(E|N) = \frac{P(E) \cdot P(N|E)}{P(N)} = \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{4}{5}}{\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{4}{13}$$

Es können mehrere Feststellungen getroffen werden.

- Das Beispiel verdeutlicht, dass der Bayes-Ansatz nützlich ist um zu zeigen, wie sich die

Wahrscheinlichkeit verändert, wenn sich die Bedingungen oder Daten ändern.

- Wie erwartet, ist die Wahrscheinlichkeit angewachsen (von 0.1 auf etwa 0.31) wenn bekannt ist, dass die Person niest hat.
- Trotz dieser Zunahme der Wahrscheinlichkeit haben weniger als die Hälfte der Leute, die niesen, Erkältungen, obwohl Niesen charakteristisch ist für Erkältungen, da die meisten mit Erkältungen niesen. Wir können dies nutzen, um die Asymmetrie der bedingten Wahrscheinlichkeit herauszustellen, wie sie in dieser Situation oder etwa in dem Richter-Fehlschluss, wo  $P(\text{Unschuld} | \text{Beweis}) \neq P(\text{Beweis} | \text{Unschuld})$  vorkommt.
- Die obige Analyse begann mit folgenden Annahmen: Ein Zehntel der Personen haben Erkältungen, vier von fünf Erkälteten niesen und ein Fünftel des Rests niest auch. Diese Annahmen könnten auf aktuellen Beobachtungen, früheren Daten oder Vermutungen basieren. Ein-Zehntel ist eine Vorher-Wahrscheinlichkeit, die Wahrscheinlichkeit, dass jemand eine Erkältung hat, ohne Kenntnis von weiteren Daten (z. B. Niesen). Wir beginnen mit dieser Schätzung und erhalten dann die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, die niest, eine Erkältung hat, die auf diesem Vorwissen und dem Fakt basiert.
- Für Unterrichtsversuche zu diesem Szenario haben wir „schöne“ Verhältnisse ausgewählt, damit die Schüler die Diagramme von Hand erstellen können. Weil die Nenner 2, 5 oder 10 sind, können die Schüler ein 10-mal-10-Raster verwenden und leicht Prozentsätze ermitteln.

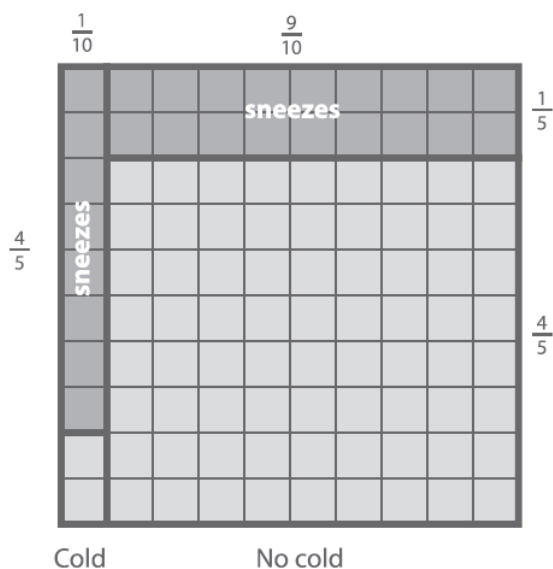


Abb. 5: Flächendiagramm für Erkältung (cold) und Niesen (sneeze). Ein Kästchen entspricht 1 %

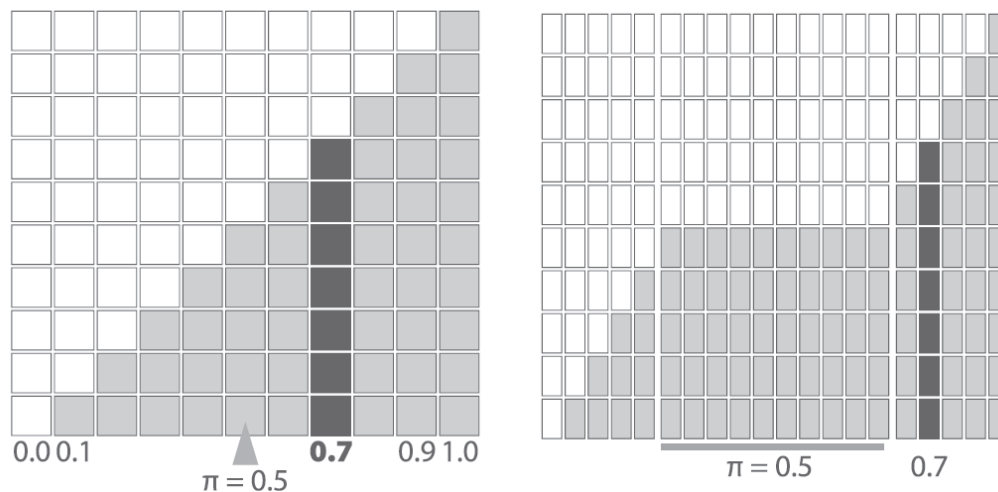


Abb. 6: Kompliziertere Flächendiagramme,  $\pi = 0,7$  ist hervorgehoben

## Weiterführungen

Wir können dieselben Strategien auf komplexere Situationen anwenden. Zum Beispiel zeigt die Abb. 6 ein Diagramm, das entsteht, wenn es 11 Hypothesen für eine mysteriöse Münze gibt, wobei  $\pi$  die Wahrscheinlichkeit für „Wappen“ ist ( $\pi = 0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1.0$ ). Jede Spalte ist unterteilt entsprechend der Wahrscheinlichkeit von Wappen oder Zahl bei dieser Hypothese. In dem Diagramm ist „Wappen“ grau oder schwarz schattiert.

Im linken Diagramm ist jede Hypothese gleichwahrscheinlich, alle Spalten haben die gleiche Breite von  $1/11$ . Wenn es tatsächlich eine Münze ist, dann könnten wir die bisherigen Erfahrungen oder unsere persönlichen Vorlieben verwenden, um der Möglichkeit, dass  $\pi = 0.5$  ist, mehr Gewicht zu geben und das rechte Diagramm zeichnen. In der Sprache von Bayes haben wir verschiedene Vorher-Wahrscheinlichkeiten erzeugt.

Wir werfen unsere mysteriöse Münze und erhalten Wappen. Unter Verwendung des linken Diagramms in der Abb. 6 können wir die neue (Nachher-) Wahrscheinlichkeit für  $\pi = 0.7$  berechnen. Sie ist von  $1/11$  (etwa 0.09) auf  $7/55$  (etwa 0.13) angewachsen. Die Wahrscheinlichkeit der anderen Hypothesen ändert sich in entsprechender Weise.

Im rechten Diagramm in Abb. 6 haben wir 20 Spalten, alle Vorherwahrscheinlichkeiten sind 0.05 bis auf  $\pi = 0.5$ , deren Wahrscheinlichkeit 0.5 beträgt. Nach einem Wappen wächst die Wahrscheinlichkeit für  $\pi = 0.7$  von 0.05 auf 0.07 (7 von 100 schattierten Rechtecken). Diagramme wie diese deuten darauf hin, dass die Nachher-Wahrscheinlichkeit eine Funktion ist, die einen Glauben repräsentiert und die Verwendung von stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen nahelegt.

Um noch weiter zu gehen, ist zu beachten, dass wir bei dieser Einführung nur die Wappen berücksichtigt haben. Wie würden z. B. diese Diagramme aussehen, wenn man zehnmal die Münze wirft und siebenmal Wappen und dreimal Zahl bekommt?

## Abschließende Bemerkungen

Unsere Verwendung von Flächendiagrammen erweitert die Idee von natürlichen Häufigkeiten. Der vorgeschlagene Unterricht hilft, die Art der Aktualisierung der Wahrscheinlichkeit zu betonen, anstatt sich ausschließlich auf die aktualisierte Nachher-Wahrscheinlichkeit zu konzentrieren.

Weitere Merkmale dieser Situation veranlassen die Schüler, sich mit Vorstellungen von verschiedenen Darstellungen und Konzepten wie der subjektiven Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten auseinanderzusetzen.

## Literatur

- de Finetti, B. (1964): Foresight: its logical laws, its subjective sources. In: Kyburg, H. E. and Smokler, H. E. (ed.) *Studies in Subjective Probability*, New York: Wiley.
- Friendly, M. (2001): A brief history of the mosaic display. <http://www.datavis.ca/papers/moshist.pdf>.
- Gigerenzer, G.; Hoffrage, U. (1995): How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review*, 102(4), 684–704.
- Martignon, L.; Krauss, S. (2009): Hands on activities with fourth-graders: A tool box of heuristics for decision making and reckoning with risk. *International Electronic Journal for Mathematics Education*, 4, 117–148.

## Anschrift des Verfassers

Tim Erickson  
 Epistemological Engineering and Lick-Wilmerding  
 High School, San Francisco, California, USA  
[eeepsmedia@gmail.com](mailto:eeepsmedia@gmail.com)